BILLARD ELLIPTIQUE

Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à 3 rebonds

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

On représente le contour du billard par l'ellipse E d'équation implicite $g(x,y)=0$ où $g(x,y)=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-1$, avec $0<b\leq a$. Une trajectoire fermée sur le billard correspond à un triangle inscrit dans E, dont les sommets vérifient la *condition de rebond* : avant le rebond, la bille suit une trajectoire rectiligne portée par le vecteur unitaire $\vec{u}$, heurte la paroi en A, et repart selon une trajectoire rectiligne portée par le vecteur unitaire $\vec{v}$ symétrique de $\vec{u}$ par rapport à la tangente à E en A.

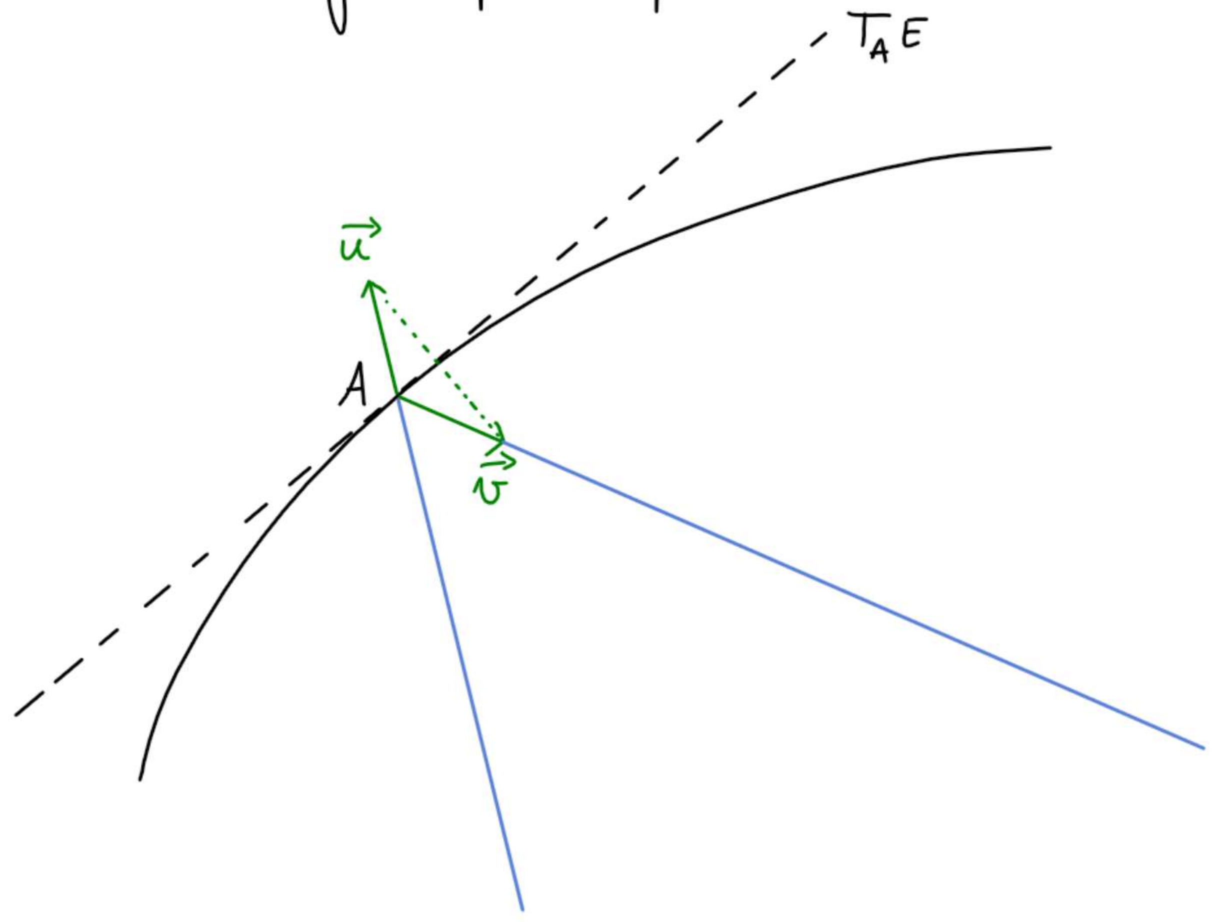

FIGURE 1 : Rebond sur la paroi

RÉSOLUTION DU PROBLÈME

▸ Un début de recherche d'une solution

On cherche un triangle inscrit dans E (autrement dit un triplet de points de E) avec une contrainte sur ses sommets : on va appliquer le théorème des extrema liés à une fonction bien choisie, différentiable sur un ouvert.

Une idée (qui – spoiler – va fonctionner) est de chercher un triangle inscrit dans E de périmètre maximal, i.e. un maximum sur $E\times E\times E$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $(A,B,C)\longmapsto AB+AC+BC$ (à un triangle, on associe son périmètre). Comme f est continue (d'après les théorèmes généraux) et $E\times E\times E$ est compact (car $E=g^{-1}(\{0\})$ est compact puisque fermé comme image réciproque d'un fermé par l'application continue g, et bornée dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie), f admet et atteint un maximum sur $E\times E\times E$ en un triplet (A,B,C).

▸ Un ouvert pour les différentier tous

Justifions que A, B et C sont deux à deux distincts (i.e. que ABC n'est pas aplati) : par exemple, si $A=B$, alors pour tout $B'\in E\setminus\{A,B,C\}$, d'après l'inégalité triangulaire, $AB'+B'C>AC$, donc $f(A,B',C)=AB'+B'C+AC>2AC=f(A,B,C)$, ce qui contredit la maximalité de (A,B,C). Ainsi, (A,B,C) appartient à l'ouvert $U\subseteq(\mathbb{R}^2)^3$ des triplets de points deux à deux distincts du plan. (NB : on ne sait différentier des fonctions que sur des ouverts).

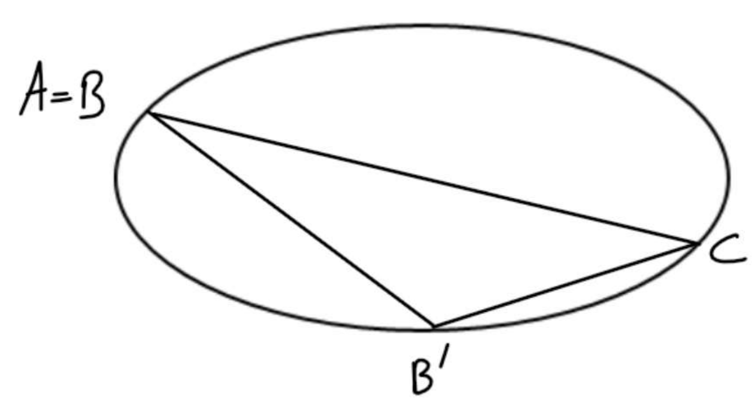

FIGURE 2 : Les points sont nécessairement distincts

▸ Le théorème des extrema liés

Posons $\tilde{g}_1 : (X,Y,Z)\longmapsto g(X)$, $\tilde{g}_2 : (X,Y,Z)\longmapsto g(Y)$ et $\tilde{g}_3 : (X,Y,Z)\longmapsto g(Z)$. Ce sont des fonctions de classe C^1 telles que $E=\{(X,Y,Z)\in(\mathbb{R}^2)^3 \mid \tilde{g}_1(X,Y,Z)=\tilde{g}_2(X,Y,Z)=\tilde{g}_3(X,Y,Z)=0\}$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\, d\tilde{g}_1(A,B,C)+\beta\, d\tilde{g}_2(A,B,C)+\gamma\, d\tilde{g}_3(A,B,C)=0$. Soit $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\in(\mathbb{R}^2)^3$. On a $d\tilde{g}_1(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=dg(A)(\vec{a})$, $d\tilde{g}_2(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=dg(B)(\vec{b})$ et $d\tilde{g}_3(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=dg(C)(\vec{c})$, donc $\alpha\, dg(A)(\vec{a})+\beta\, dg(B)(\vec{b})+\gamma\, dg(C)(\vec{c})=\vec{0}$. En choisissant $\vec{a}$ tangent à E en A, $\vec{b}$ tangent à E en B, et $\vec{c}$ non tangent à E en C, on a $dg(A)(\vec{a})=dg(B)(\vec{b})=\vec{0}$ et $dg(C)(\vec{c})\neq\vec{0}$, donc $\gamma=0$. On montre de même que $\alpha=\beta=0$, et donc

$(d\tilde{g_1}(A,B,C),\ d\tilde{g_2}(A,B,C),\ d\tilde{g_3}(A,B,C))$ est libre. D'après le théorème des extrema liés, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $df(A,B,C) = \lambda_1\, dg(A) + \lambda_2\, dg(B) + \lambda_3\, dg(C)$.

- Vérification de la condition de rebond

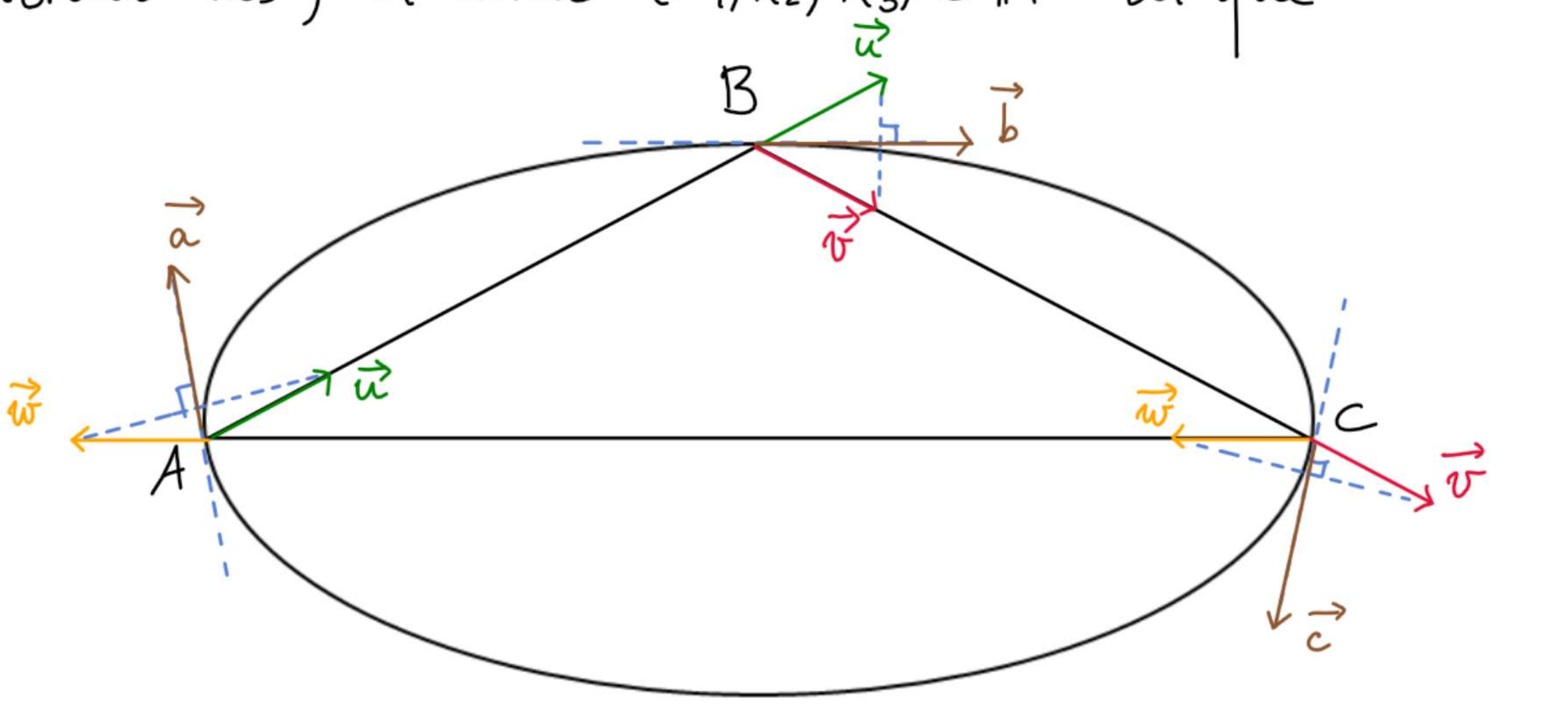

FIGURE 3 : Une trajectoire valide (+notations)

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ tangents à E en A, B et C respectivement. Posons $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC}$ et $\vec{w} = \dfrac{\overrightarrow{CA}}{CA}$. Explicitons $df(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$: rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $\forall h \in \mathbb{R}^2$, $d(\|\cdot\|)(x)(h) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h\right\rangle^{(*)}$.
Posons $\varphi : (X,Y) \longmapsto XY = \|\overrightarrow{XY}\| = \|Y-X\|$: on a $d\varphi(A,B)(\vec{a},\vec{b}) = d(\|\cdot\|)(\overrightarrow{AB})(\vec{b}-\vec{a}) = \left\langle \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \vec{b}-\vec{a}\right\rangle = \langle \vec{u}, \vec{b}-\vec{a}\rangle$. De là :

$$df(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \langle \vec{u}, \vec{b}-\vec{a}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{c}-\vec{b}\rangle + \langle \vec{w}, \vec{a}-\vec{c}\rangle = \langle \vec{w}-\vec{u}, \vec{a}\rangle + \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{v}-\vec{w}, \vec{c}\rangle = 0$$

donc en prenant $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{c} = \vec{0}$ (qui sont bien tangents à E), on a $\langle \vec{w}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{a}\rangle$, et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ étant unitaires, ils sont symétriques par rapport à $\mathbb{R}\vec{a}$ qui est la tangente à E en A : autrement dit, la condition de rebond est vérifiée en A. On fait de même en B et C, ce qui achève la démonstration. ■

($*$: $d(\|\cdot\|^2)(x)(h) = d(\langle\cdot|\cdot\rangle)(x)(h) = \langle 2x|h\rangle$, $d(\|\cdot\|)(x)(h) = d(\sqrt{\cdot}\circ\|\cdot\|^2)(x)(h) = \left[d(\sqrt{\cdot})(\|x\|^2)\circ d(\|\cdot\|^2)(x)\right](h) = \frac{1}{2\|x\|^2}\langle 2x|h\rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}\Big| h\right\rangle$.)

COMMENTAIRES :

- Attention à la longueur : ce développement peut passer en 15 minutes, mais il vaut mieux rogner sur certains aspects mathématiques de la preuve plutôt que sur l'aspect pédagogique de la présentation, sans quoi l'exposé risque d'être assez indigeste. Au début de la présentation, faites un dessin, et faites-le évoluer au fur et à mesure de l'exposé !
- Remarque importante ⚠ Le caractère elliptique du billard n'intervient nullement dans la démonstration : la seule hypothèse à faire sur la forme du billard est que celui-ci est convexe (pour que trois points sur le bord définissent bien un triangle inscrit dans le billard), et que son bord soit une courbe C^1 (pour satisfaire les hypothèses du théorème des extrema liés). Cependant, je trouve la présentation plus digeste et intuitive avec une ellipse.
- Dessiner une trajectoire valide peut s'avérer difficile … la meilleure approximation est la situation de FIGURE 3 : dessinez une ellipse plutôt allongée, placez un rebond en haut, et les deux autres symétriques juste en-dessous du grand axe de l'ellipse.
- La formalisation mathématique des différentes fonctions et leurs différentielles est la partie la plus dure à appréhender dans cette preuve : il faut y avoir bien réfléchi.